Дисциплины вычислительной физики

С.Д. Мостовой

1. При помощи многомерного метода Ньютона решите систему восьми нелинейных уравнений с восемью переменными с точностью $\delta = 10^{-14}$.

$$e^{x_i - x_{i+1} - 0.2 \cdot i} - \mathrm{th}(x_i) \cdot \sin(0.8 \cdot x_i) = 0, \qquad i = \overline{0,7},$$

$$x_8 = 2.$$

2. При помощи динамического метода (твердого шарика) найдите значения N-компонентного вектора $\vec{x}$, доставляющего минимум функции

$$V(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{N-2} \{(x_{i+1} - x_i)^2 + (0.01 \cdot \cosh(0.01 \cdot i - 1.5) + \sin(0.2 \cdot i)) \cdot x_i\}, \qquad N = 300.$$

Граничные условия: $x_0 = 0.5$, $x_{N-1} = 1$. Точность: $\max_i |\nabla_i V| < 10^{-9}$. Выведите значения $x_1, x_2, x_{10}, x_{125}$ и постройте общий график x_i в зависимости от i.

3. При помощи методики из темы «Задача МНК аппроксимации данных аналитической функцией» оцените значения параметров функции

$$y(x) = (1 + ax + bx^2)e^{-kx},$$

применяемой для описания данных из файла `data3.txt` (скачайте с сайта Курса). В третьей колонке указаны значения «погрешности» σ_i, которые также нужно учесть в программе! В качестве ответа выведите значения a, b, k.

Замечание. Разрешается использовать стандартную/стороннюю библиотеку линейной алгебры.

4. Методом Ромберга вычислите значения интегралов:

$$\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}}; \qquad \int_1^{\infty} \frac{1 + 2\ln(\pi + x) + x\sqrt{x}}{x^{3.5}} dx; \qquad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\ln(3 + x + y)}{\cos\big(10(x + y)\big) + \frac{11}{10}} dxdy.$$

Начальное разбиение $N = 12$. Точность (отличие последовательных приближений) 10^{-12}. Выведите последовательные приближения алгоритма, включая финальное значение.

5. При помощи метода квадратуры Гаусса с соответствующими системами КОП вычислите интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{1.5 + \cos(0.1x)} dx; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{1.5 + \cos(0.1x)} dx.$$

Используйте $n = 20$. Корни необходимых полиномов вычислите, соответствующие коэффициенты возьмите согласно формулам в статьях en.wikipedia.org/wiki/Gauss–Laguerre_quadrature и en.wikipedia.org/wiki/Gauss–Hermite_quadrature.

6. При помощи БПФ (см. лекцию) осуществите гармонический анализ данных файла `task4_series.txt` (скачайте с сайта Курса). В файле записан сигнал продолжительностью 2 с. Разложите его в спектр и постройте $\mathrm{Re}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ в диапазоне частот [0; 7] Гц. Выведите амплитуду фурье-образа на частоте 3 Гц.

7. Решите систему ОДУ при $x \in [0; 7]$ при помощи

а. РК4 с пост. шагом 0.05;
б. РК4 с пост. шагом 0.01;
в. РК с адаптивным шагом по критерию

$$\max_i \frac{|e_i|}{\max(|y_i|,\ 10^{-10})} < 10^{-2};$$

г. метод Хаммера-Холлингсуорта 4 пор с критерием сходимости: покомпонентная разность последовательных значений не превышает 10^{-10}.

$$\begin{cases} y_0' = 1, \\ y_1' = 2xy_1 \ln(\max(y_2, 10^{-3})), \\ y_2' = -2xy_2 \ln(\max(y_1, 10^{-3})), \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = e.$$

Точное решение системы: $y_1 = \exp \sin x^2$ и y_2 через $\cos\ \cdot$.

Приведите графики: модуля отличия численного решения от точного в зависимости от x, а также изменения шага в в. в зависимости от x.

8. Решите систему ОДУ при $x \in [0; 20]$ при помощи

а. экстраполяционного метода с вложенным методом Грэгга (см. Лекцию);
б. метода РК 2 порядка с адаптивным шагом по критерию

$$\max_i \frac{|e_i|}{\max(|y_i|,\ 10^{-10})} < 10^{-4};$$

$$\begin{cases} y_0' = 1, \\ y_1' = 1 + y_1^2 y_2 - 4y_1, \\ y_2' = 3y_1 - y_1^2 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1.01, \quad y_2(0) = 3.$$

Для экстраполяцинного метода выберите $H = 0.5$. Постройте две кривые $y_1(x)$ на одном графике. Для РК2 постройте зависимость величины шага h от абсциссы. Для экстраполяционного метода также постройте зависимость порядкового номера числа дробления N, выбранного из набора этих чисел на каждом шаге, от абсциссы.

9. Запрограммируйте генерацию 10^6 чисел согласно распределению:

- Bi(8; 2/3);
- Exp(2).

Из стандартной библиотеки разрешается воспользоваться только генератором U[0;1], сами распределения необходимо написать «руками». Постройте графики: гистограмму для Bi и плотность вероятности для Exp – теоретические и экспериментальные.

10. Решите интегральное уравнение

$$f(x) = \int_0^2 \sin(2x)\,(1 + \cos y) f(y) dy + \cos x$$

методами

а. поточечной аппроксимацией на сетке $i = \overline{0, N},\ N = 500$;
б. методом Галёркина на базисе тригонометрических функций (см. лекцию).

Постройте функцию решения в зависимости от аргумента x.